

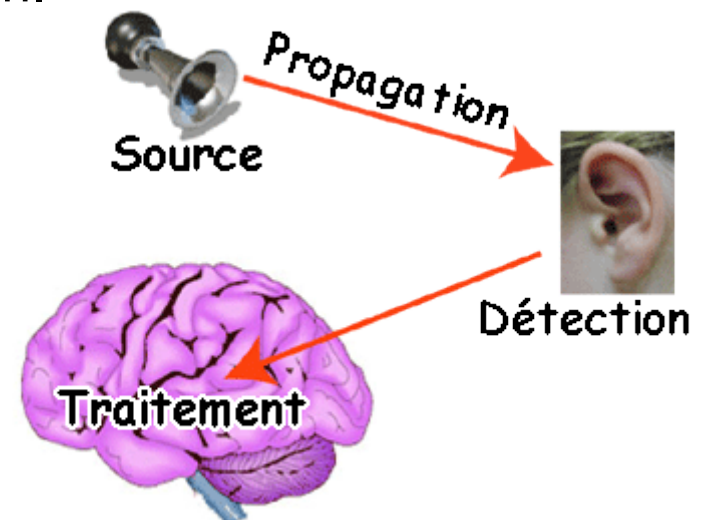
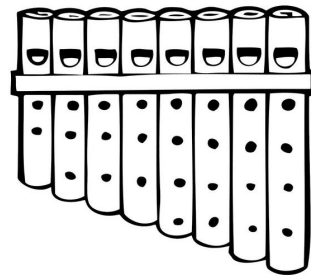
# **Musique et mathématiques**

## **Cours de L1 MIPC**

- Qu'est ce qu'un son?**
- Qu'est ce qu'un bruit?**
- Qu'est ce qu'un son musical?**
- Qu'est ce qu'une note musicale?**
- Quelles relations entre la musique et les mathématiques ?**

## Qu'est ce qu'un son ?

- **Définition au sens de la Physique** : **onde** (=propagation d'une perturbation) **produite par vibration** d'un support. On parle alors d'**onde sonore**. Les vibrations émises produisent des vibrations de l'air qui atteignent l'oreille et le système auditif d'où **une perception auditive**. La propagation peut se faire dans les gaz, les liquides ou les solides.
- **Définition au sens physiologique** : **sensation auditive** créée par la vibration physique en question.



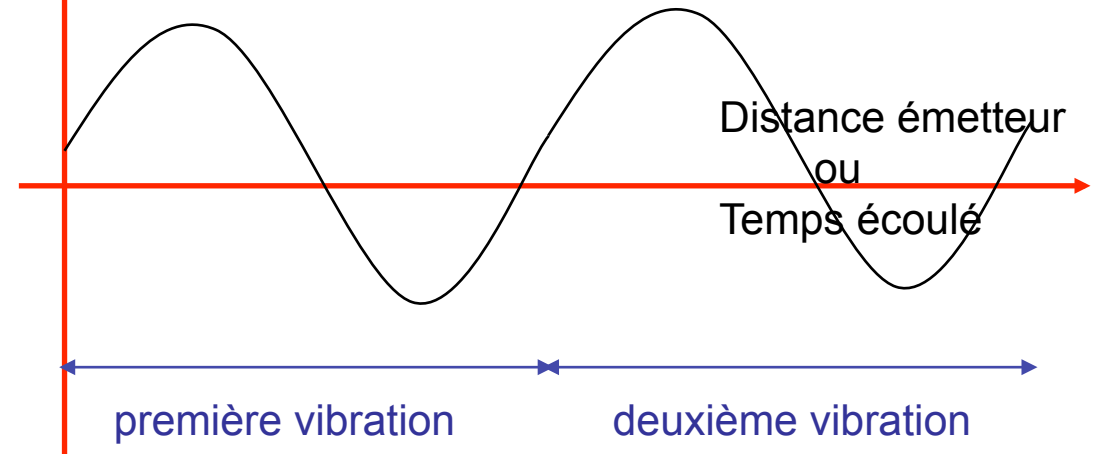
Page internet conseillée :  
<http://physique.haplosciences.com/son.html>

Cette tranche d'air est dilatée. C'est une zone de dilatation. La pression de l'air atteint un creux.

Cette tranche d'air est comprimée. C'est une zone de compression. La pression de l'air atteint un pic.



Pression de l'air  
(amplitude de la vibration)

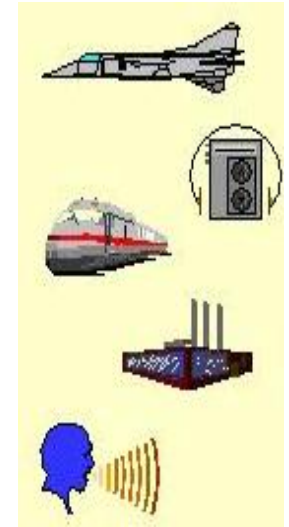


Le son se propage en faisant vibrer l'air autour de la source. Chaque tranche d'air se comprime et se dilate périodiquement.

Branche de la Physique étudiant les sons : **l'acoustique**.

## Qu'est ce qu'un bruit ?

- un **son** inopportun!! (définition AFNOR) **question de perception?!**
- de l'énergie acoustique audible pouvant être néfaste à la santé  
(définition **A**gence **F**rançaise de **S**écurité **S**anitaire de l'**E**nvironnement et du **T**ravail)

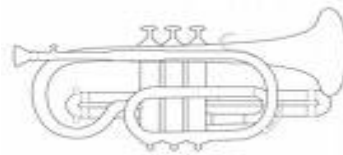


## Qu'est ce qu'un son musical ?

Les propriétés (physiques) du son sont importantes en **musique** car elles doivent correspondre à des **sensations auditives agréables** à l'oreille.

**Un son musical est un son possédant des propriétés dites harmoniques.** On retient les **4** paramètres suivants :

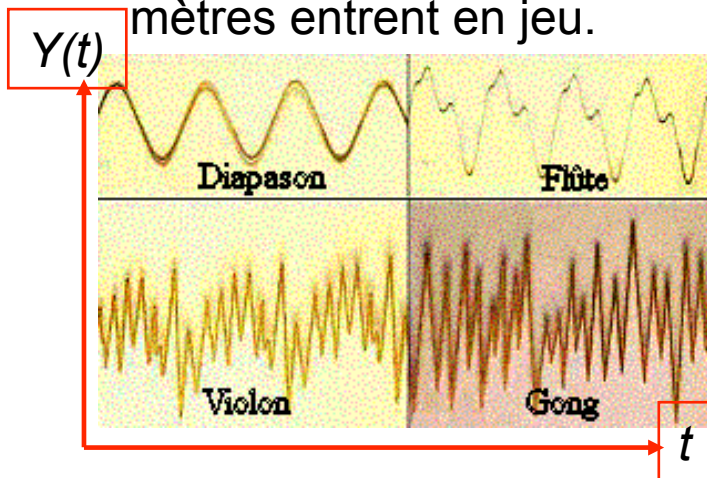
**Hauteur, durée, intensité et timbre**



Jean VAILLANT - cours de L1  
Musique et mathématiques



- **Hauteur** : fréquence de vibration (nombre de vibrations par seconde) mesurée en Hertz (hz). Elle permet de distinguer les sons *grave*, *médium* et *aigu*.
- **Durée** : temps écoulé au cours de la vibration en seconde (s). Elle permet de distinguer les sons *court* et *long*.
- **Intensité** : associée à l'amplitude de vibration, mesurée en décibel (dB). Elle permet de distinguer les niveaux sonores *faible* et *fort*.
- **Timbre** : Courbe d'amplitude de la vibration en fonction du temps. En psycho acoustique, plus de paramètres entrent en jeu.



$Y(t)$  = amplitude à l'instant  $t$

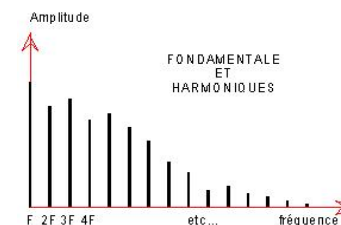
Jean VAILLANT - cours de L1  
Musique et mathématiques

Le timbre d'un **son pur simple** de hauteur  $f$  est une courbe **sinusoïdale** de période  $1/f$  (exemple du diapason).

Le timbre d'un **son pur complexe** de hauteur  $f$  est une superposition de courbes sinusoïdales appelées **harmoniques** dont les fréquences sont des **multiples entiers** de la fréquence **fondamentale**  $f$ , soit :  $f, 2f, 3f, 4f, 5f, \dots, nf, \dots$

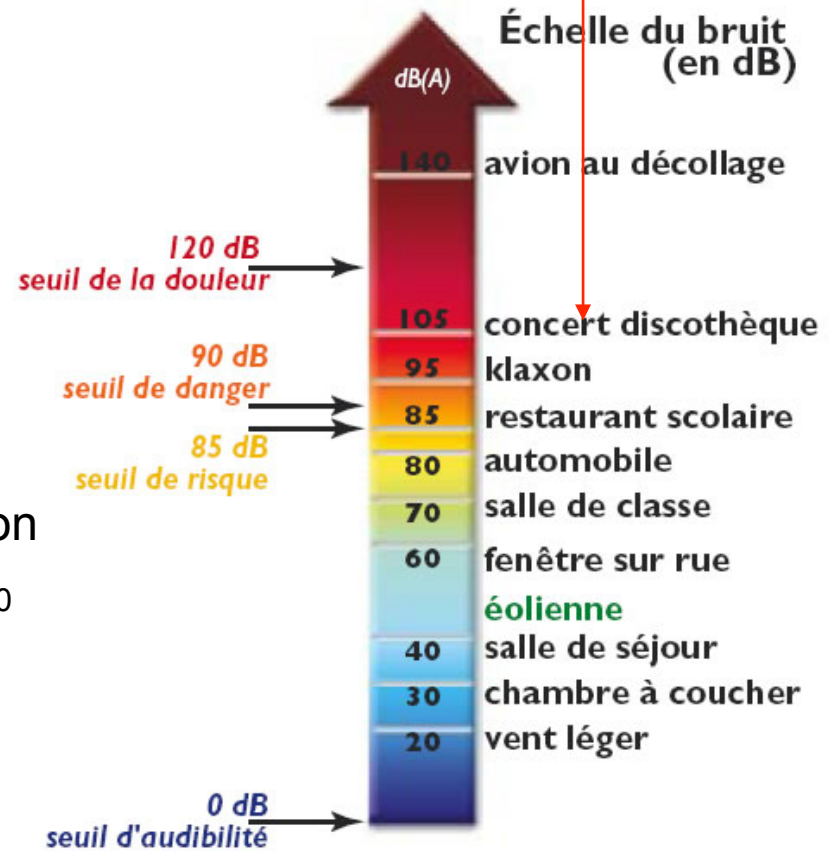
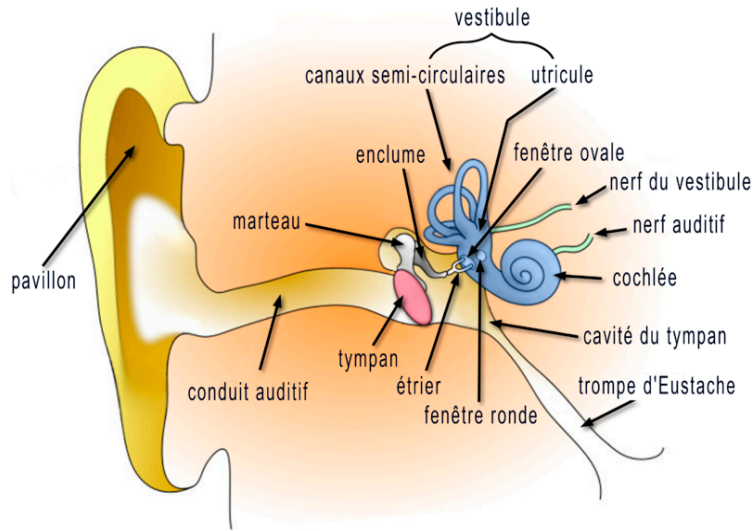
[Cliquer ici pour la simulation d'une onde périodique](#)

**Spectre harmonique** : c'est le graphe (fréquence, amplitude) des harmoniques.



Un son peut être **non périodique** : Certains instruments émettent des fréquences **inharmoniques** (i.e. non multiples de  $f$ ). Un tel son est dit contenir des **partiels**.

**Attention à l'intensité sonore** par rapport au **tympan** (membrane transmettant les vibrations de l'air aux osselets de l'oreille) même s'il s'agit de musique!



Le **décibel (dB)** est une grandeur sans dimension évaluant la perception ressentie. Soient  $P_1$  et  $P_0$  deux puissances émettrices, la mesure du bruit généré par  $P_1$  relativement à  $P_0$  est :

$$X_{dB} = 10 \log_{10}(P_1/P_0).$$

Dans la pratique,  $P_0$  correspond au seuil d'audibilité.

## Qu'est qu'une note musicale?

C'est la hauteur d'un son musical c'est-à-dire sa fondamentale  $f$ .

**Note de référence (depuis 1953):** 440 hz  
qui est la fréquence émise par le diapason.



## Sensation auditive et rapports de fréquences

**Oreille humaine** : sensible aux **rapports de fréquences**, et non aux différences de fréquences.

**Aristoxène** (4<sup>ème</sup> siècle avant J.-C.) : « les notes doivent être jugées par l'oreille »

Les **pythagoriciens** : « les notes doivent être jugées par un rapport mathématique »

**Monocorde** : instrument constitué d'une unique corde tendue sur une caisse de résonance. Il a servi depuis l'antiquité (Pythagore) à calculer le rapport arithmétique entre sons musicaux.

### L'expérience avec un monocorde montre que

Une **corde cylindrique vibrante** émet une fréquence fondamentale  $f$  (en Hz) dépendant de :

- de la masse volumique  $\mu$ , exprimée en  $\text{g/m}^3$  ;
- de la force de tension notée  $\tau$ , exprimée en Newton (N)
- de la longueur  $L$  de la corde, exprimée en m
- du rayon  $r$  de la corde, exprimé en m

$$\text{Formule : } f = \frac{1}{2Lr} \left( \frac{\tau}{\mu\pi} \right)^{1/2}$$

où  $\pi = 3,14..$

Plus la **corde** est légère ( $\mu$  petit), plus  $f$  est élevée (**cordes aiguës** d'une guitare **plus fines**);

Plus la **corde** est **tendue** ( $\tau$  grand), plus  $f$  est élevée (**son plus aigu** lorsqu'on tend la corde);

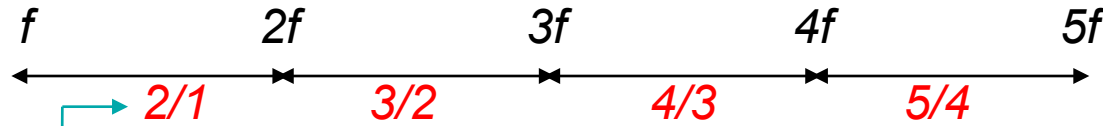
Plus la **corde** est **longue** ( $L$  grand), plus  $f$  est basse (donc **son plus grave**);

Plus la **corde** est **épaisse** ( $r$  grand), plus  $f$  est basse (donc **son plus grave**);

Jean VAILLANT - cours de L1

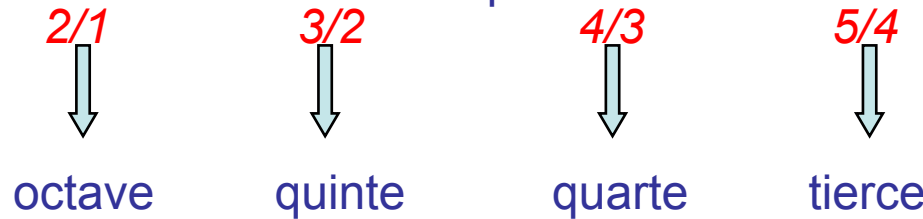
Musique et mathématiques

Considérons les 5 premières harmoniques d'un son pur de fondamentale  $f$ .

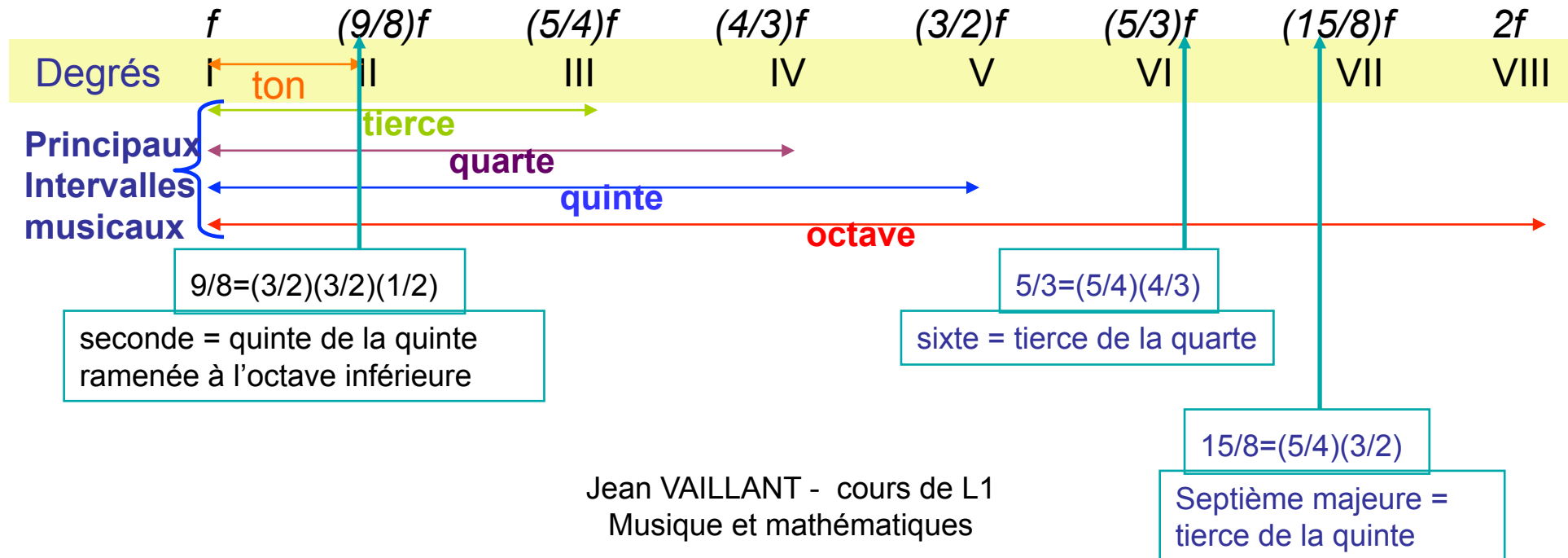


Rapports de fréquences entre harmoniques consécutives

Les sensations auditives correspondantes sont :



Dans la musique occidentale, l'intervalle  $[f, 2f]$  est divisé en 7 intervalles supposés correspondre à des notes agréables à l'oreille. En se basant sur les harmoniques naturelles 2, 3 et 5, on a :





	$f$	$(9/8)f$	$(5/4)f$	$(4/3)f$	$(3/2)f$	$(5/3)f$	$(15/8)f$	$2f$
Degrés	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

On a une **gamme** (succession de notes sur l'étendue d'une octave)  
**heptatonique** (à 7 degrés). Le système harmonique occidental est basé sur  
cette **gamme dite diatonique**.



D'autres rapports de fréquences peuvent être utilisés comme on le verra plus loin.  
Visions autres en Afrique, Arabie, Chine, Inde, Amérique précolombienne, ...  
Par exemple, gammes pentatoniques (à 5 degrés)

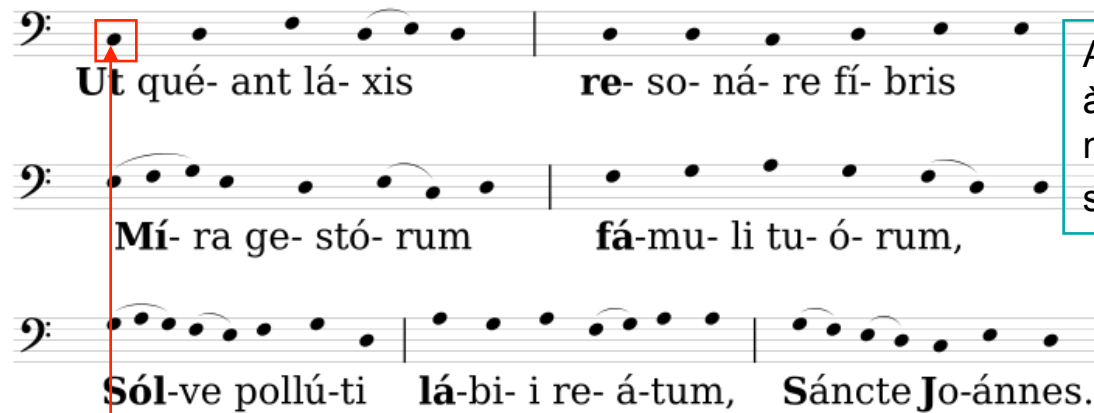
### Comment a-t-on déterminé le nombre de noms de note et les hauteurs correspondantes?

Quand on entend un son de hauteur  $f$  puis un son de hauteur  $2f$ , on a la **même sensation auditive**, à part que le second son est plus aigu.

**Les notes correspondantes porteront le même nom.**

**Avant le 11ème siècle**, les notes musicales étaient indiquées par les lettres A, B, C, D, E, F, G ,a,b,c,d,e,f,g,aa,bb,cc,dd,ee,ff,gg,...(référence à la gamme heptatonique)  
**Le A correspondait à la 4<sup>ème</sup> corde à vide du violoncelle c'est-à-dire l'actuel LA.**

**Au 11ème siècle, le moine Guy d'Arezzo utilise le Chant grégorien en latin « Hymne à St Jean-Baptiste » pour nommer les 7 notes de la gamme diatonique:**

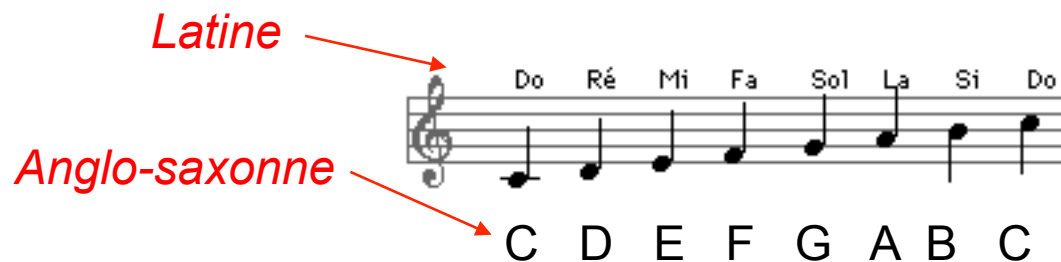


Ut qué- ant lá- xis re- so- ná- re fí- bris  
Mí- ra ge- stó- rum fá- mu- li tu- ó- rum,  
Sól- ve pollú- ti lá- bi- i re- á- tum, Sáncte Jo- á nnes.

Afin que tes serviteurs puissent chanter à gorge déployée tes accomplissements merveilleux, ôte le péché de leurs lèvres souillées, saint Jean. »

La note la plus grave dans le registre d'une voix ténor

Deux types de notations fréquemment utilisés :



*Latine* → Do Ré Mi Fa Sol La Si Do  
*Anglo-saxonne* → C D E F G A B C

Une note sur une partition représente une hauteur (et aussi une durée).

## Notes sur une guitare

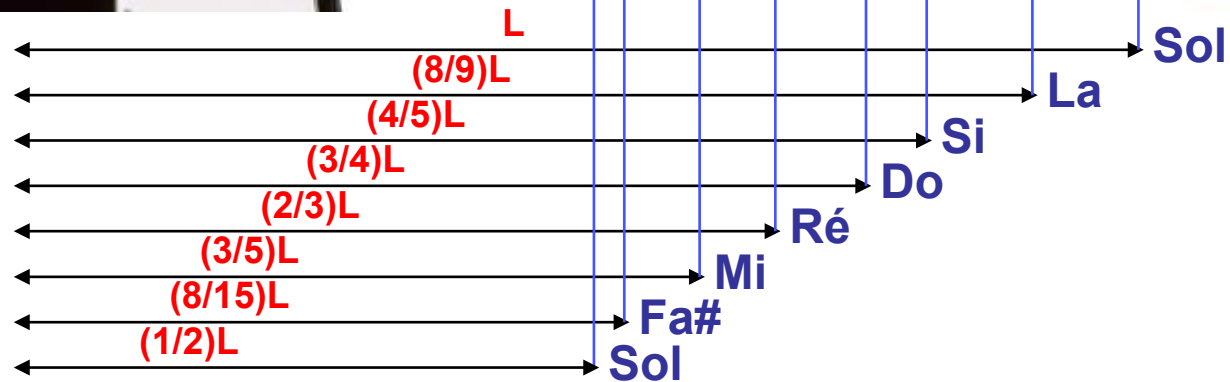
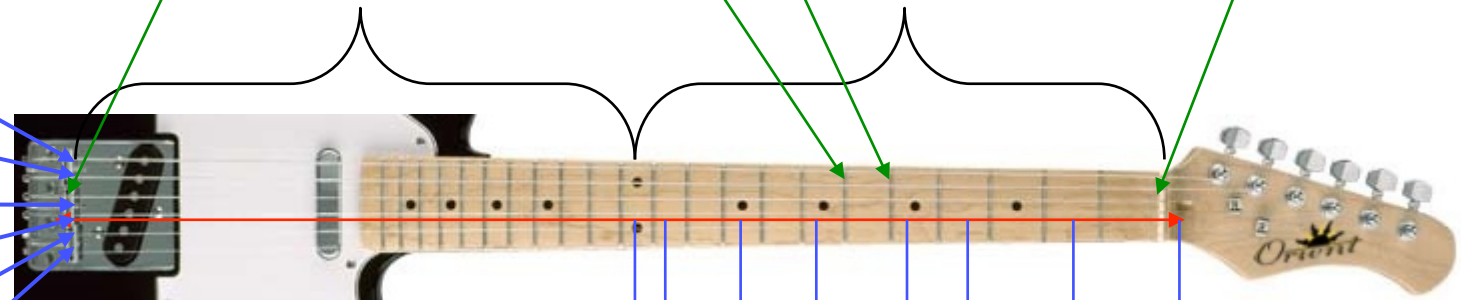
12 notes par octave séparées par un **demi-ton**  
(rapport pythagoricien = **16/15**)

Sillet : permet aux cordes de rester parallèles

Chevalet : permet de fixer les cordes sur la guitare

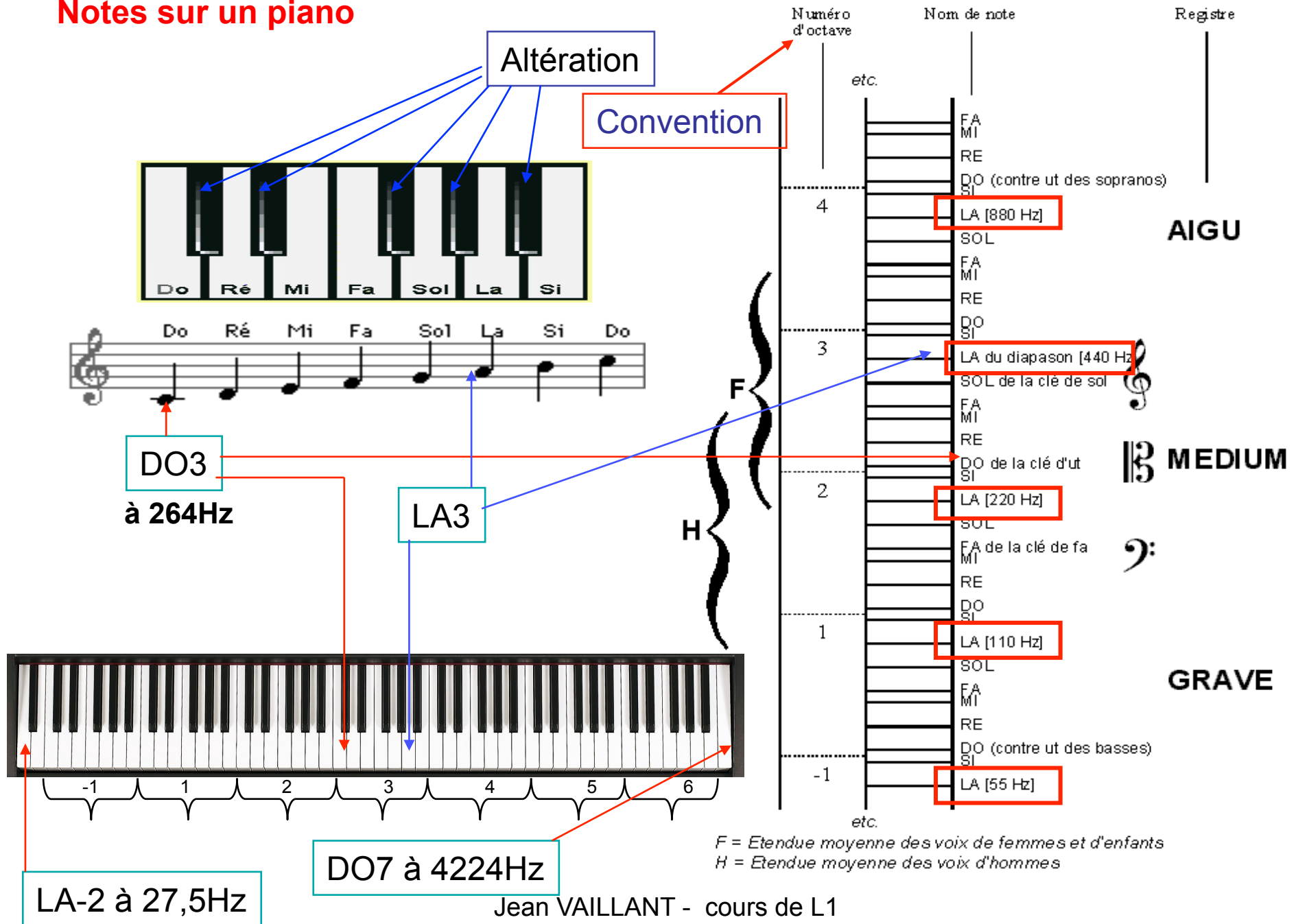
Frettes : servent à diviser le manche

Mi  
La  
Ré  
Sol  
Si  
Mi



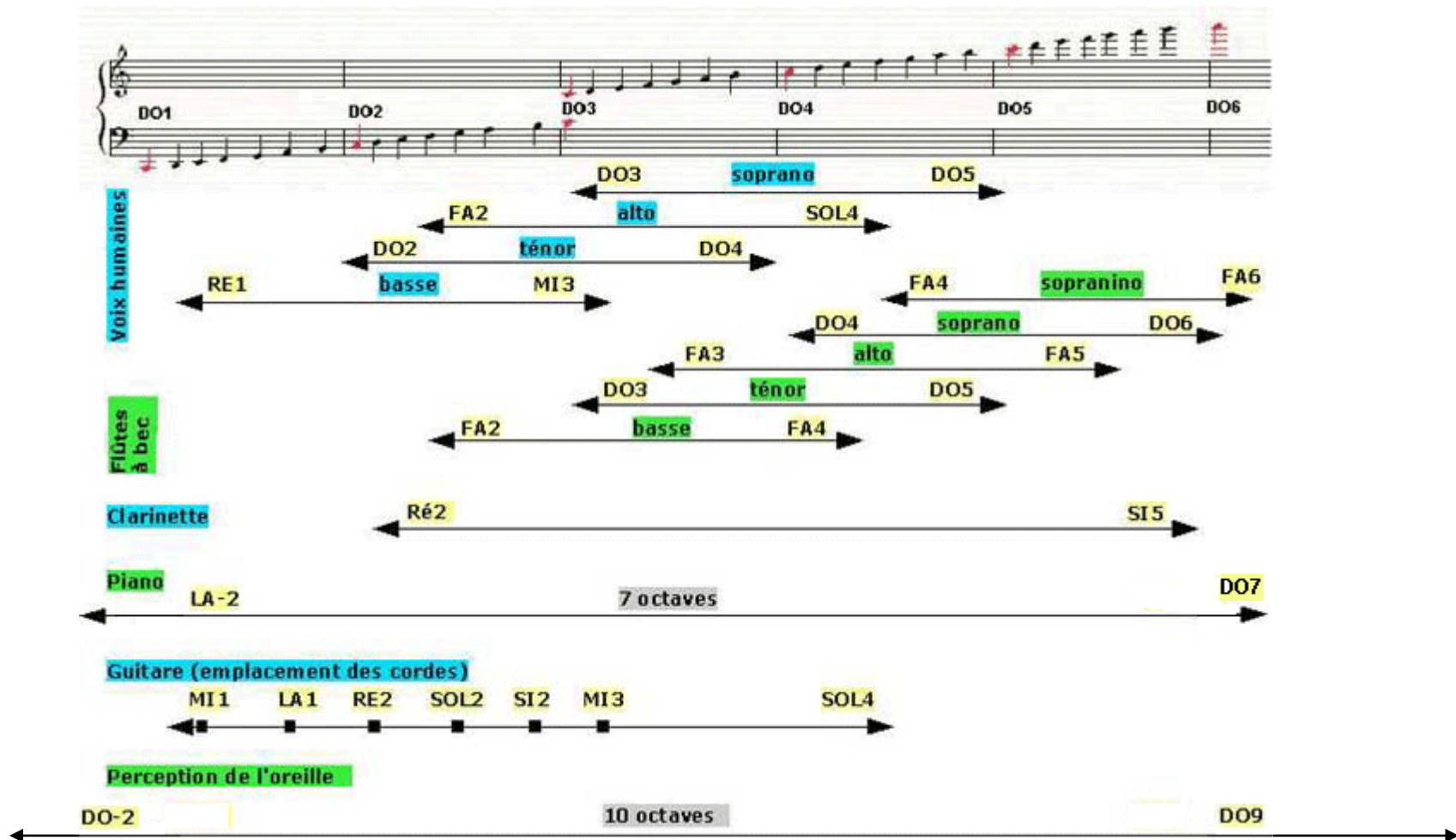
Note pour la corde à vide

# Notes sur un piano



## Registres de quelques instruments

**Registre** = étendue totale depuis la note la plus grave jusqu'à la note la plus aigüe



## Identification d'une gamme

La distance entre chacun des degrés de la gamme nous indique le type de gamme qui est employée. Cette distance se mesure en **ton** et en  **demi-ton**.

Pour la gamme diatonique, on a :



1 ton, 1 ton, 1/2 ton, 1 ton, 1 ton, 1 ton, 1/2 ton

Structure de la gamme diatonique

Remarque : une octave correspond à :  
12 demi-tons consécutifs (soit 6 tons)

Nombre de gammes heptatoniques possibles  
= nombre de façons de choisir 6 séparateurs  
parmi 11 éléments = 462

Quelques exemples de gamme  
à la tonalité de Do

Blues	
Pentatonique Majeure	
Pentatonique Mineure	
Altérée	
Tons	
Chromatique	
Ionien	
Dorien	
Phrygien	
Lydien	
Mixolydien	
Aéolien	
Locrien	
Diminuée	
Dim inversée	

## Quelques éléments de solfège mathématique

### Solfège = théorie musicale et ses notations

Un **intervalle musical** est un couple de réels positifs  $(f, f^*)$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ .

Si  $f^* > f$ , l'intervalle est dit **ascendant**; si  $f^* < f$ , l'intervalle est dit **descendant**.

**Gamme naturelle** : gamme basée sur les harmoniques de la note fondamentale (**tonique**).

La gamme naturelle de **Pythagore** est basée sur les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> harmoniques donc sur l'octave et la quinte naturelles. La gamme naturelle de **Zarlino** est basée sur les 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> harmoniques donc sur l'octave, la quinte et la tierce naturelles.

### Tableau des rapports de fréquences pour les gammes de Zarlino, Pythagore et tempérée

Intervalle	Degré	Rapports en fraction ou puissance			Rapports en valeur décimale		
		Zarlino	Pythagore	tempérée	Zarlino	Pythagore	tempérée
Unisson	I	1	1	1	1,000	1,000	1,000
Seconde	II	9/8	9/8	2 <sup>1/6</sup>	1,125	1,125	1,122
Tierce	III	5/4	81/64	2 <sup>1/3</sup>	1,250	1,266	1,260
Quarte	IV	4/3	4/3	2 <sup>5/12</sup>	1,333	1,333	1,335
Quinte	V	3/2	3/2	2 <sup>7/12</sup>	1,500	1,500	1,498
Sixte	VI	5/3	27/16	2 <sup>3/4</sup>	1,667	1,688	1,682
Septième majeur	VII	15/8	243/128	2 <sup>11/12</sup>	1,875	1,898	1,888
Octave	VIII	2	2	2	2,000	2,000	2,000

|

Deux intervalles musicaux  $(f_1, f_1^*)$  et  $(f_2, f_2^*)$  sont dits équivalents si  $f_1^*/f_1 = f_2^*/f_2$ .  
 Ces deux intervalles correspondent alors au même rapport de fréquences

Les **algébristes** notent la gamme de **Pythagore**  $\langle 2, 3 \rangle$  et celle de **Zarlino**  $\langle 2, 3, 5 \rangle$ .

Cela signifie que

- les rapports de fréquence pythagoriens sont de la forme  $2^i 3^j$  avec  $i$  et  $j$  entiers relatifs,
- les rapports de fréquences zarliniens de la forme  $2^i 3^j 5^k$  avec  $i, j$  et  $k$  entiers relatifs.

### Forme algébrique des rapports de fréquences pour Pythagore et Zarlino.

Intervalle	Degré	Pythagore	Zarlino
Unisson	I	$2^0 3^0$	$2^{-3} 3^2 5^0$
Seconde	II	$2^{-3} 3^2$	$2^{-3} 3^2 5^0$
Tierce	III	$2^{-6} 3^4$	$2^{-2} 3^0 5^1$
Quarte	IV	$2^2 3^{-1}$	$2^2 3^{-1} 5^0$
Quinte	V	$2^{-1} 3^1$	$2^{-1} 3^1 5^0$
Sixte	VI	$2^{-4} 3^3$	$2^0 3^{-1} 5^1$
Septième majeur	VII	$2^{-7} 3^5$	$2^{-3} 3^1 5^1$
Octave	VIII	$2^1 3^0$	$2^1 3^0 5^0$



# Précisions sur les rapports de Zarlino

Fréquence pour la gamme tempérée

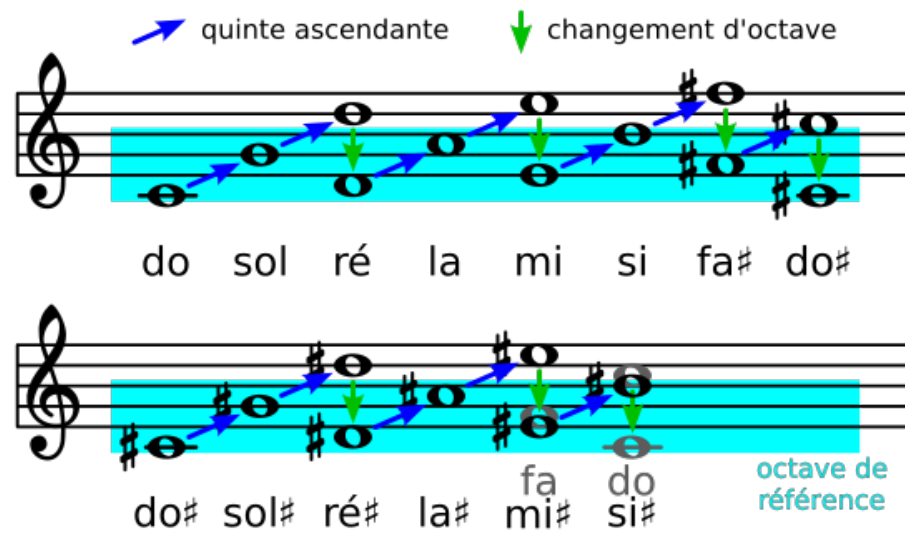
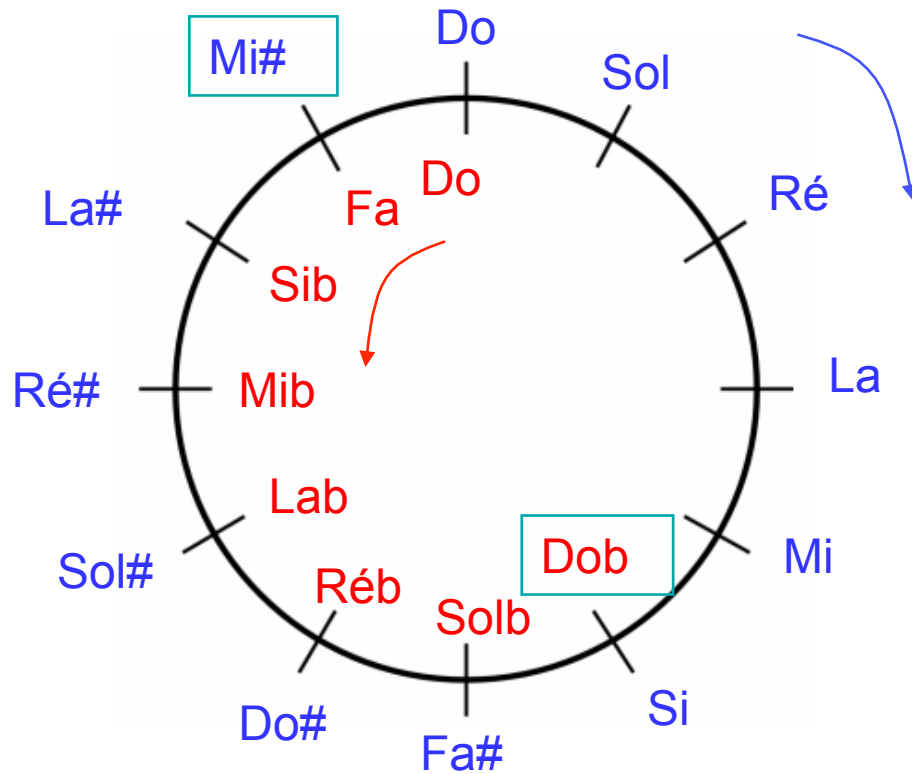
Note	Intervalle/DO	Rapport de fréquence/ DO à 264Hz		Fréquence en Hz	Fréquence en Hz
		(en fraction)	(en valeur)		
DO	unisson	1/1	1,000	264,00	264,00
DO #	1/2 ton chromatique	25/24	1,042	275,00	279,70
RE ♭	1/2 ton diatonique	16/15	1,067	281,60	279,70
RE bas	ton mineur	10/9	1,111	293,33	296,33
RE	ton majeur	9/8	1,125	297,00	296,33
RE #	seconde augmentée	75/64	1,172	309,38	313,95
MI ♭	tierce mineure	8/5	1,700	316,80	313,95
MI	tierce majeure	5/4	1,250	330,00	332,62
FA ♭	quarte diminuée	32/25	1,280	337,92	332,62
MI #	tierce augmentée	125/96	1,302	343,75	352,40
FA	quarte juste	4/3	1,333	352,00	352,40
FA #	quarte augmentée	45/32	1,406	371,25	373,35
SOL ♭	quinte diminuée	64/45	1,422	375,47	373,35
SOL	quinte juste	3/2	1,500	396,00	395,55
SOL #	quinte augmentée	25/16	1,563	412,50	419,07
LA ♭	sixte mineure	8/5	1,600	422,40	419,07
LA	sixte majeure	5/3	1,667	440,00	443,99
LA #	sixte augmentée	225/128	1,758	464,06	470,39
SI ♭	septième mineure	9/5	1,800	475,20	470,39
SI	septième majeure	15/8	1,875	495,00	498,37
DO ♭	octave diminuée	48/25	1,920	506,88	528,00
SI #	septième augmentée	125/64	1,953	515,63	528,00
DO	octave	2/1	2,000	528,00	528,00

La gamme tempérée, elle, ne différencie pas demi-ton diatonique (2 notes de nom différent) et demi-ton chromatique (même nom de notes), par exemple Ré – Mib et Ré - Ré# .

Dans les gammes naturelles de Zarlino et de Pythagore,  
 12 quintes ascendantes consécutives correspondent à l'intervalle  $(f, (3/2)^{12}f)$   
 7 octaves ascendantes consécutives correspondent à l'intervalle  $(f, 2^7f)$   
 Or  $(3/2)^{12} = 129,75$  tandis que  $2^7=128$   
**12 quintes valent presque (et non exactement) 7 octaves !!**

Cycle des quintes descendantes

Cycle des quintes ascendantes



## Conclusions

En solfège mathématique, un son musical est défini simplement par sa fréquence  $f$ .

Ceci est bien-sûr très réducteur (du point de vue de la Physique ou de la Psycho Acoustique).

Certains instruments peuvent, en principe, émettre toutes les fréquences dans une octave (cas des instruments à cordes), donc un nombre infini.

Certains instruments ne peuvent émettre qu'un nombre fini de sons (piano par exemple). Ils sont dits tempérés.

L'oreille humaine est sensible aux rapports de fréquences et non aux écarts de fréquences.

La fréquence attribuée à une note musicale dans une octave peut varier légèrement selon la gamme utilisée.

Les gammes dites naturelles sont basées sur les rapports entre harmoniques mais il y a des inconvénients quand des transpositions (changements de tonalité) sont effectuées. La gamme tempérée permet de contrecarrer ce problème mais on a des soucis de consonance (cohérence entre sons pour l'oreille).

La distance musicale élémentaire est le **comma** qui correspond à la plus petite hauteur de son que l'oreille humaine peut distinguer. Il existe plusieurs types de comma. Notons les 2 suivants :

**Comma syntonique ou zarlinien** : il vaut  $\frac{81}{80}$  c'est-à-dire le rapport entre la tierce pythagoricienne issu du cycle des quintes  $\frac{81}{64}$  et la tierce naturelle  $\frac{5}{4}$ .

Comma pythagoricien : il vaut  $\frac{3^{12}}{2^{19}}$  c'est-à-dire le rapport entre 12 quintes naturelles  $(\frac{3}{2})^{12}$  et 7 octaves naturelles  $2^7$ .